푸리의 변환의 수학적 원리

esctabcapslock

2021년 6월 19일

이 상태로 보고서를 마무리하기에는, 푸리에 변환 자체를 수학적으로 접근하지 않은 것과, 내가 사용한 알고리즘에 대해 잘 모른다는 사실이 마음에 걸렸음. 따라서, 위의 탐구를 다 마친 뒤, 푸리에 변환에 관한 수학 이론적인 조사를 추가로 진행함.

※ https://blog.myungwoo.kr/54의 자료를 나름대로 이해, 본인 수준의 언어로 정리한 것임.

1 변환이 성립하는 직관적 이유

1.1 적당한 삼각함수 만들기

푸리에 변환의 입출력 데이터를 각각 N차원 복소벡터공간 $\mathbb{C}^N$의 원소로 생각하자. 각 백터 a의 k번째 성분을 $a[k]$라고 표기하겠다. 그리고 두 복소 백터의 내적을 다음과 같이 정의하자

$$\langle a|b\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a[n]\overline{b[n]} \quad (\bar{b}\text{는 } b\text{의 컬레 복소수})$$

그리고 ϕ_k를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi_k[n] = \exp\left(\frac{2\pi k}{N}ni\right) = w_N^{kn} \quad (w_N\text{은 1의 } N\text{제곱근})$$

그러면, 임의의 정수 k, l (단,$k \neq l$)에 대해서,$\langle \phi_k|\phi_l\rangle = 0$ 성립.

1.2 직교성 증명

$k \neq l$ **일때**

$$\begin{aligned}\langle \phi_k | \phi_l \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi k}{N} ni\right) \exp\left(-\frac{2\pi l}{N} ni\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi(k-l)}{N} ni\right) \\ &= \frac{\exp(2\pi(k-l)i) - 1}{\exp\left(\frac{2\pi}{N}(k-l)i\right) - 1} = 0\end{aligned}$$

$k = l$**일때,**

$$\langle \phi_k \phi_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(0) = N$$

즉, ϕ_0, ϕ_1, $\cdots$, ϕ_{N-1}은 서로 직교하니까, $\mathbb{C}^N$의 직교기저가 된다.

1.3 이산 푸리에 변환의 정의

푸리에 변환의 입력 데이터가 a, 출력 결과가 A라면, 푸리에 변환은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$A[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a[k]\phi_n[k] = \left\langle a | \overline{\phi_n} \right\rangle$$

즉, 푸리에 변환이란 기존의 백터 a를, 새로운 기저 ϕ_0, ϕ_1, $\cdots$, ϕ_{N-1}들을 활용해 새롭게 표현한 것이라고 이해할 수 있다.

2 푸리에 역변환 증명

2.1 공식

푸리에 변환의 역변환은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a[n] = \frac{1}{N} \langle A[k] | \phi_k \rangle$$

2.2 증명

$$\langle A | \phi_l \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} A[n]\overline{\phi_l[n]}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \langle a|\overline{\phi_n}\rangle \overline{\phi_l[n]} \quad (\because 1.3\text{절에서 정의함})$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a[k]\phi_n[k]\overline{\phi_l[n]}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a[k]\phi_k[n]\overline{\phi_l[n]}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a[k] \left(\sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n]\overline{\phi_l[n]} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a[k] \langle \phi_k|\phi_l\rangle = N\vec{a}[l] \quad (\because 1.2\text{절에서 증명함 })$$

즉, 내적을 이용하면 쉽게 역변환을 구할 수 있다.

3 고속 푸리에 변환

3.1 점화 관계식

$n < \frac{N}{2}$일 때,

$$A[n] = A_{even}[n] + w_N^n A_{odd}[n]$$

$$A[n+N/2] = A_{even}[n] - w_N^n A_{odd}[n]$$

3.2 증명

N이 2의 거듭제곱 꼴일 때 생각하자. 그리고, 푸리에 변환을 간단하게 F로 나타내자. $F(a) = A$이렇게.

$n < N/2$인 경우를 생각하자. $a_{\text{even}}[n] = a[2n]$, $a_{odd}(n) = a_{odd}[2n+1]$로 정의하자.

$$F(a)[n]$$

$$= \langle a|\overline{\phi_n}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a[k]w_N^{kn}$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} a[2k]w_N^{2kn} + \sum_{k=0}^{N/2-1} a[2k+1]w_N^{(2k+1)n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} a[2k]w_N^{2kn} + w_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} a[2k+1]w_N^{2kn}$$

$$= F(a_{even})[n] + w_N^n F(a_{odd})[n]$$

$n \geq \frac{N}{2}$인 경우, A_{even}과, A_{odd}의 주기가 $\frac{N}{2}$니까 거의 비슷한 꼴로 적을 수 있다. “거의 비슷한”의 이유는, w_N^n의 부호가 바뀌는 것을 고려해야 하기 때문이다. ($w_N^{N/2}$ 는 복소평면상에서 π 회전이므로 부호가 바뀜.)

이 경우에는 다음과 같이 적힌다. (통일성을 위해 다시 $n < \frac{N}{2}$로 표현함)

$$F(a)\,[n+N/2] = F(a_{even})[n] - w_N^n F(a_{odd})[n]$$

따라서, 기존의, 길이가 N이였던 것을 $\frac{N}{2}$짜리 2개로 이루어진 점화식으로 표현할 수 있다. 이것이 바로 고속 푸리에 변환(FFT)의 원리이다.

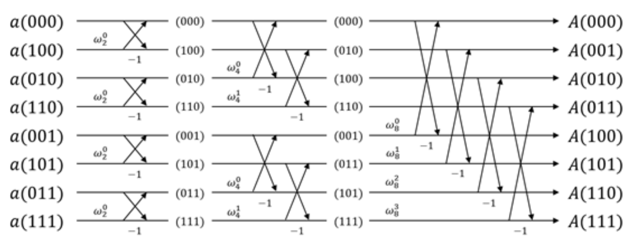

그림 1: 콜리-튜키 알고리즘의 원리, https://casterian.net/archives/297 참조

다시 이 점화식을 컴퓨터가 계산하기 쉽도록 반복문 형태로 적절히 변형한 것이, 콜리-튜키 알고리즘, 혹은 버터플라이 알고리즘으로, 앞에서 필자가 뭣도 모르고 인터넷에서 긁어와 사용한 코드이다.